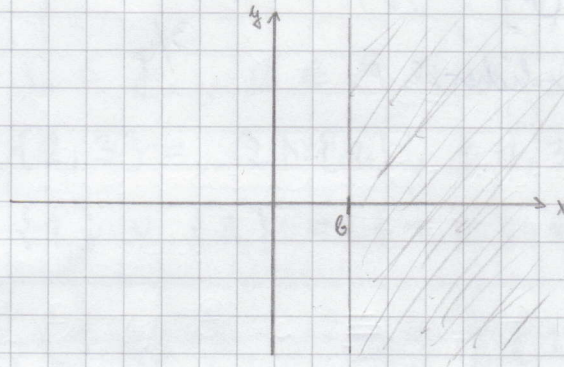


1	2	3	4	Σ
4	3	3	4	14/16

Stochastik - Übung 2 (Abgabe: 27.10.09)

Heute zur Aufgabe?

2) b) Wir wissen, dass offene ~~Teilmengen~~ ^{Teilmengen} auch im $\mathbb{R}^2$ Borelmengen sind, also z.B. $R = \{(x, y) \mid x > b \in \mathbb{R}\}$:



Durch solche leicht als offen zu identifizierenden Mengen kann man auch solche erzeugen, die möglw. nicht auf den ersten Blick eingestuft werden können, z.B. schneide man R mit $L = \{(x, y) \mid x < b' \in \mathbb{R}\}$ (wobei $b' > b$) und erhalte einen „Schlauch“ und beim weiteren Schneiden mit Mengen mit entsprechenden Bed. für y ein offenes Rechteck (Schnitte sind wieder Borelmengen). Ähnlich erhält man bis auf ein abgeschlossenes Rechteck (Übergängen) oder eben jenes (Komplement). Das Rechteck ist natürlich nur ein Bsp., ~~jede~~ jede Flächenbegrenzung ist möglich. Also auch

$$A = \{(x, y) \mid 2 < x < 3, 0 < y < x^3\} \text{ und}$$

$$B = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\} \text{ (abg. Rechteck)}$$

Dann ist $A \cup B$ auch Borelmenge. Dies ist die zu überprüfende Menge.

3) ~~Poissonverteilung:~~ $P_X(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ bei $A \cup B$ man benötigt Punkte (x, y)

$$P(E) = \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots \right) e^{-\lambda} = (\cosh \lambda) = \frac{1}{2} (e^{\lambda} + e^{-\lambda})$$

$$P(F) = \left(\frac{\lambda^0}{1!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right) e^{-\lambda} = (\sinh \lambda) = \frac{1}{2} (e^{\lambda} - e^{-\lambda})$$

(bekannt aus Analysis)

3/4

etwas
vage / langatmig,
aber
richtig

3) Poisson-Verteilung: $P_i(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$ $E = \dots$, $F = \dots$ Test!

Zwische
schritt.

$$P(E) = \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots \right) e^{-\lambda} = (\cosh \lambda) \cdot e^{-\lambda} = \frac{1}{2} e^{-\lambda} (e^{\lambda} + e^{-\lambda})$$

zu knapp!

$$P(F) = \left(\frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots \right) e^{-\lambda} = (\sinh \lambda) \cdot e^{-\lambda} = \frac{1}{2} e^{-\lambda} (e^{\lambda} - e^{-\lambda}) \quad (\text{vgl. Anm.})$$

$$P(E) - P(F) = \frac{1}{2} e^{-\lambda} (e^{\lambda} + e^{-\lambda} - e^{\lambda} + e^{-\lambda})$$

$$= e^{-2\lambda} > 0 \quad (\checkmark)$$

Also ist E wahrscheinlicher als F.

3/4

1a) $\Omega = \{1, 2, 3\}$ $\mathcal{E} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$

$\Rightarrow \Omega \in \mathcal{E}, \emptyset \in \mathcal{E} \quad \checkmark$

$\{2, 3\} = \Omega \setminus \{1\}, \{1, 3\} = \Omega \setminus \{2\} \quad \checkmark$

$\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{E} \quad \times$

1b) ~~$\Omega = \{1, 2, 3\}$ $\mathcal{E} = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$~~

~~$\Rightarrow \Omega \notin \mathcal{E}, \emptyset \notin \mathcal{E} \quad \times$~~

~~$\{1\} = \Omega \setminus \{2\} \quad \checkmark$~~

~~$\Omega = \{1\} \quad \mathcal{E} = \emptyset$~~

~~$\Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{E}, \Omega \notin \mathcal{E} \quad \times$~~

keine Elemente $\Rightarrow$ keine Komplemente $\checkmark$

keine Elemente $\Rightarrow$ nichts zu zeigen $\checkmark$

~~(Das ist auch die einzige Menge $\mathcal{E}$, die das erfüllt, da sonst $E \in \mathcal{E} \Rightarrow \Omega \setminus E \in \mathcal{E} \Rightarrow E \cup (\Omega \setminus E) \in \mathcal{E}$~~ gut

1c) $\Omega = \{1, 2\}$ $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \emptyset, \{1\}\}$

$\Rightarrow \Omega \in \mathcal{E}, \emptyset \in \mathcal{E} \quad \checkmark$

$\Omega \setminus \{1\} = \{2\} \notin \mathcal{E} \quad \times$

$\{1, 2\} \cup \{1\} = \{1, 2\} \quad \checkmark$

2a) $\mathbb{Q}$ Borelmeng, da für $q \in \mathbb{Q}$ $\mathbb{R} \setminus \{q\}$ offen

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{\mathbb{Q}\}$ Borelmeng, und da $\mathbb{Q}$

abzählbar: $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} = \mathbb{Q}$ Borelmeng.

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ Borelmeng $(-\pi, 0), (-\infty, -\pi)$ Borelmengen

$\Rightarrow \bigcup [-\pi, \pi]$ Borelmeng $\Rightarrow \mathbb{Q} \cup [-\pi, \pi]$ B.M. $\checkmark$

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup (-\pi, \pi))$ Borel(menge)

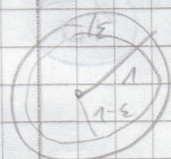
$\Rightarrow \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{-\pi, \pi\}))$ Borel(menge) ✓ $\square$

~~2~~ ~~4~~ ~~7~~

~~$\forall \epsilon$~~

Text! Einheitskugel

Skizze?



(4)

$$P(\|x\| \leq 1) = 1$$

$r=1$ ganze Kugel

$$P(\|x\| \geq 1-\epsilon) = \underbrace{P(\|x\| \leq 1)}_{\text{ganze Kugel}} - \underbrace{P(\|x\| \leq 1-\epsilon)}_{\text{"inneres" der Kugel}}$$

Gleichverteilung $\Rightarrow P(\|x\| \leq 1-\epsilon) = \frac{V(1-\epsilon)}{V(1)}$ ✓

wobei $V(r) =$ Volumen der Kugel mit Radius r

n gerade: ($n=2k$)

$$\Rightarrow P(\|x\| \geq 1-\epsilon) = \frac{1 - \frac{(1-\epsilon)^n \pi^k}{k!}}{1 - \frac{(1-\epsilon)^n \pi^k}{k!}} = 1 - \frac{(1-\epsilon)^n \pi^k}{k! (1^n \pi^k)}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow \infty} 1 - \frac{(1-\epsilon)^n \pi^k}{k!}$$

$$= 1 - \frac{(1-\epsilon)^n}{1} = 1 - (1-\epsilon)^n$$
 ✓

$$\lim_{h \rightarrow \infty} 1 - \underbrace{(1-\epsilon)^n}_{\substack{\nearrow \\ 1}} = 1 - 0 = 1$$

$\Rightarrow$ Kugel fast nur aus Punkten nahe am Rand $\square$

n ungerade: ($n=2k+1$)

$$\Rightarrow P(\|x\| \geq 1-\epsilon) = 1 - \frac{(1-\epsilon)^n 2^n k! \pi^k}{n! 1^n 2^n k! \pi^k}$$

$$= 1 - \frac{(1-\epsilon)^n}{1} = 1 - (1-\epsilon)^n$$
 ✓

$$\lim_{h \rightarrow \infty} 1 - 1 - \epsilon = -\epsilon$$

4/4